

森口繁一略歴

- 1916年 香川県小豆島に生まれる
- 1938年 東京帝国大学工学部航空学科卒業，同講師
- 1945年 同助教授
- 1954年 工学博士
- 1955年 東京大学教授
- 1977年 東京大学名誉教授，東京電気通信大学工学部教授

主要著書・訳書

- デミング著 推計学によるデータのまとめ方 (1950年・岩波書店)
- 数値表A, B (1954年, 56年・日科技連出版社)
- 品質管理 (岩波全書, 1955年・岩波書店)
- 初等数理統計学 (1957年・培風館)
- 統計解析 (岩波講座「現代応用数学」) (1958年・岩波書店)
- 初等力学 (1959年・培風館)
- JIS FORTRAN 入門上, 下 (1968年, 69年・共立出版)

新編 統計的方法

定価 1,200円

1959年11月25日 初版第1刷発行
 1976年4月15日 新編第1刷発行
 1980年12月10日 新編第6刷発行

権利者との
 協定により
 検印省略

編者 森口繁一
 発行者 田原正邦

発行所 財団法人 日本規格協会

〒107 東京都港区赤坂4丁目 1-24
 振替 東京 6-195146 Tel 03 (583) 8001

印刷・製本 (株)第一印刷所 © Japanese Standards Association, 1959

8. 実験の計画と結果の解析

この章では、いくつかの処理の効果を同時に比較するための基本的な実験の計画と、その結果を分散分析法を通して解析する方法を説明する。8.1節では同じ系統の a 個の処理を相互に比較する場合を考える。このような実験計画を、水準数 a 個の一元配置という。

8.3節以下の節では、因子が二つの場合、その他について説明する。

8.6節では因子が多くある場合に比較的少ない実験回数で目的を達成することができる直交表を用いた実験について説明する。

8.1 一元配置(母数模型)

この方法は6章で述べた二つの母平均の差の検定・推定の拡張であって、 a 個の母平均の間に有意差があるかどうかを検定し、各平均の差などを推定するためのものである。

例 フェライトコア (金属酸化物の粉末を焼きかためて作った磁性材料)の製造工程がある。 A_1, A_2, A_3, A_4 の4通りの原料粉末の配合方法で各5回ずつ焼成処理を行って、製品の磁気の強さを測定した。その結果を表8.1.1に示す。ただし焼成処理の順序はランダムに行った。

表 8.1.1 データ x_{ij}
(単位 μ)

	A_1	A_2	A_3	A_4
	10.8	10.7	11.9	11.4
	9.9	10.6	11.2	10.7
	10.7	11.0	11.0	10.9
	10.4	10.8	11.1	11.3
	9.7	10.9	11.3	11.7

(説明) この実験は一元配置(one-way layout)によるものである。一元配置というのは、因子Aの a 水準 A_1, A_2, \dots, A_a をとり、その各水準でそれぞれ n 回ずつ行う実験のわりつけのことである。ただし繰返し数が n_1, n_2, \dots, n_a というように水準ごとに違っていてもよい。

二つの配合の比較であれば t 検定によって行うことができるが、同時に 4 つを比較するためには分散分析法が用いられる。

さて、配合 A_i で焼成した j 番目の製品の測定値 x_{ij} は、母平均が μ_i で、分散が σ_e^2 の母集団からのサンプルと考えられるから、これを次のように分解して解釈することができる。

$$(\text{データ}) = (\text{総平均}) + (\text{配合 } A_i \text{ の効果}) + (\text{誤差})$$

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \quad (8.1.1)$$

ここに、 α_i は i 番目の配合 A_i に対する母平均 μ_i の総平均 μ からのカタヨリ

$$\alpha_i = \mu_i - \mu \quad (8.1.2)$$

で、 A_i の水準に固有な値である。これは(8.1.2)式からわかるように

$$\sum_i \alpha_i = 0 \quad (8.1.3)$$

という性質を持っている。このように α_i が各水準に固有な値(母数)である

とき、この構造模型を“母数模型”とよぶ。

(8.1.1)式の ε_{ij} は、独立に、平均 0、分散 σ_e^2 の正規分布に従う変数である。

ここで、まず各配合 A_i について測定値の平均 (\bar{x}_i) を求め、総平均 ($\bar{x}_{..}$) との差を作ってみると、これは各配合の効果 α_i の推定値を与えるものと考えられる。

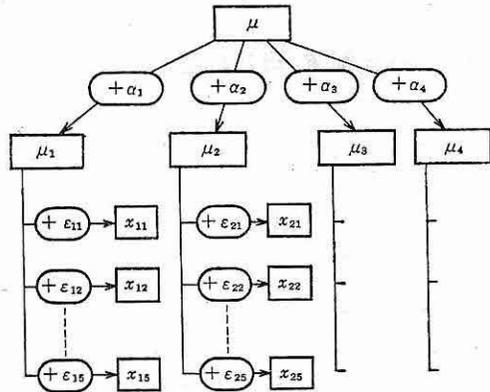


図 8.1.1 一元配置(模型)

表 8.1.2 平均の計算

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	和	平均
和	51.5	54.0	56.5	56.0	218.0	
平均 \bar{x}_i	10.3	10.8	11.3	11.2	43.6	10.9
$\bar{x}_i - \bar{x}_{..}$	-0.6	-0.1	0.4	0.3	0	

表 8.1.3(a) データの構造

	x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{4j}
デ	x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}
ー	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{42}
タ	x_{13}	x_{23}	x_{33}	x_{43}
	x_{14}	x_{24}	x_{34}	x_{44}
	x_{15}	x_{25}	x_{35}	x_{45}

	μ	μ	μ	μ
総	μ	μ	μ	μ
平	μ	μ	μ	μ
均	μ	μ	μ	μ
	μ	μ	μ	μ
	μ	μ	μ	μ

	α_1	α_2	α_3	α_4
A	α_1	α_2	α_3	α_4
の	α_1	α_2	α_3	α_4
効	α_1	α_2	α_3	α_4
果	α_1	α_2	α_3	α_4
	α_1	α_2	α_3	α_4

	ε_{1j}	ε_{2j}	ε_{3j}	ε_{4j}
誤	ε_{11}	ε_{21}	ε_{31}	ε_{41}
差	ε_{12}	ε_{22}	ε_{32}	ε_{42}
(ε_{13}	ε_{23}	ε_{33}	ε_{43}
残	ε_{14}	ε_{24}	ε_{34}	ε_{44}
差)	ε_{15}	ε_{25}	ε_{35}	ε_{45}

表 8.1.3(b) データの分解

	x_{ij}	x_{ij}	x_{ij}	x_{ij}
	10.8	10.7	11.9	11.4
	9.9	10.6	11.2	10.7
	10.7	11.0	11.0	10.9
	10.4	10.8	11.1	11.3
	9.7	10.9	11.3	11.7

	$m = \bar{x}_{..}$	$m = \bar{x}_{..}$	$m = \bar{x}_{..}$	$m = \bar{x}_{..}$
	10.9	10.9	10.9	10.9
	10.9	10.9	10.9	10.9
	10.9	10.9	10.9	10.9
	10.9	10.9	10.9	10.9
	10.9	10.9	10.9	10.9

	$\alpha_i = \bar{x}_i - \bar{x}_{..}$			
	-0.6	-0.1	0.4	0.3
	-0.6	-0.1	0.4	0.3
	-0.6	-0.1	0.4	0.3
	-0.6	-0.1	0.4	0.3
	-0.6	-0.1	0.4	0.3

	$e_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_i$			
	0.5	-0.1	0.6	0.2
	-0.4	-0.2	-0.1	-0.5
	0.4	0.2	-0.3	-0.3
	0.1	0.0	-0.2	0.1
	-0.6	0.1	0.0	0.5

このようにして各配合の効果を
見ることができるが、これをその
まま利用するわけにはいかない。
これらの値には繰返しごとに変化
する変量 ϵ_{ij} , すなわち繰返し誤差
が含まれているから、繰返し誤差
を尺度にして配合間の差の有意性を論ずる必要がある。

表 8.1.4 残差 $x_{ij} - \bar{x}_i$.

j	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
1	-0.5	-0.1	0.6	0.2
2	-0.4	-0.2	-0.1	-0.5
3	0.4	0.2	-0.3	-0.3
4	0.1	0.0	-0.2	0.1
5	-0.6	0.1	0.0	0.5

つぎに各配合での一つ一つの測定値から、それぞれの平均値を差し引くと、
表8.1.4の値が得られる。これらの値は同一配合で焼成したときの繰返し誤差
を示すものとみなすことができる。

以上の結果を、データの構造の(8.1.1)式と対比して、表8.1.3(a), 表8.1.3
(b)のように表すことができる。

この分解は、まずデータを総平均 $\bar{x}_{..}$ と総平均からの残差 $(x_{ij} - \bar{x}_{..})$ に分
け、さらに後者をAの効果に対応する成分 $(\bar{x}_i - \bar{x}_{..})$ と、残差 $(x_{ij} - \bar{x}_i)$ と
に分けたものと見ることができる。

そして、これに対応して「総残差平方和」

$$S_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 \quad (8.1.4)$$

は二つの成分

$$S_A = n \sum_{i=1}^a (\bar{x}_i - \bar{x}_{..})^2 \quad (8.1.5)$$

$$S_e = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \quad (8.1.6)$$

に分解される。すなわち、表8.1.3(b)の場合、

$$S_A = 5\{(-0.6)^2 + (-0.1)^2 + (0.4)^2 + (0.3)^2\} = 3.10$$

$$S_e = (0.5)^2 + (-0.4)^2 + (0.4)^2 + \dots + (0.1)^2 + (0.5)^2 = 2.18$$

とすると、 $S_T = S_A + S_e$ となるのである。この S_A と S_e は、表8.1.3(b)の、
下の二つの箱について、その中の数の2乗の和を全部加えたものにそれぞれ
一致している。

実際の計算は、上の(8.1.4), (8.1.5), (8.1.6)式を変形して、

$$CT = \frac{(\sum_i \sum_j x_{ij})^2}{an} \quad (8.1.7)$$

$$S_T = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - CT \quad (8.1.8)$$

$$S_A = \frac{\sum_i (\sum_j x_{ij})^2}{n} - CT \quad (8.1.9)$$

$$S_e = S_T - S_A \quad (8.1.10)$$

とした方が便利である。ここで CT (correction term) は修正項(補正項)と
呼ばれるもので、一般にデータの総和の二乗をデータの総数で割った値であ
る。なお、計算に際しては、まずデータを適当に変換して簡単な数値にして
おくとよい。

例題 8.1.1 表8.1.1のデータについて分散分析表を作れ。

(解) (a) 変換および和の表と平方表の作成

データ x_{ij} を次のように変換し、その平方(2乗)の値を()内に書く。

$$u_{ij} = (x_{ij} - 10.0) \times 10 \quad (8.1.11)$$

表 8.1.5 変換表および平方表(()内はその前の数の平方を示す)

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
	8 (64)	7 (49)	19 (361)	14 (196)
	-1 (1)	6 (36)	12 (144)	7 (49)
u_{ij}	7 (49)	10 (100)	10 (100)	9 (81)
	4 (16)	8 (64)	11 (121)	13 (169)
	-3 (9)	9 (81)	13 (169)	17 (289)
$\sum_j u_{ij}$	15 (225)	40 (1600)	65 (4225)	60 (3600)
$\sum_i \sum_j u_{ij}$	180 (32400)			

S_T, S_A, S_e の計算に必要な $u_{ij}, (\sum_j u_{ij})^2, (\sum_i \sum_j u_{ij})^2$ は表 8.1.5 のカッコの中の数値
から求められる。

$$\sum_i \sum_j u_{ij}^2 = 64 + 1 + 49 + \dots + 289 = 2148$$

$$\frac{\sum_i (\sum_j u_{ij})^2}{n} = \frac{225 + 1600 + 4225 + 3600}{5} = \frac{9650}{5} = 1930$$

$$CT = \frac{(\sum_i \sum_j u_{ij})^2}{an} = \frac{32400}{4 \times 5} = 1620$$

(b) 各平方和の計算

(8.1.11)式で変換されたデータ u_{ij} による各平方和を, S_T', S_A', S_e' とすると, (8.1.8)

(8.1.9), (8.1.10) 式から

$$\left. \begin{aligned} S_T' &= 2148 - 1620 = 528 \\ S_A' &= 1930 - 1620 = 310 \\ S_e' &= 528 - 310 = 218 \end{aligned} \right\} \quad (8.1.12)$$

これらの値は u_{ij} についての平方和であるから, もとの変数 x_{ij} の平方和にもどさなければならぬ。(8.1.11)式で変換したのであるから

$$\left. \begin{aligned} S_T &= 528/10^2 = 5.28 \\ S_A &= 310/10^2 = 3.10 \\ S_e &= 218/10^2 = 2.18 \end{aligned} \right\} \quad (8.1.13)$$

となり, これらの値はさきに求めた値と一致する。

注 一般に $u = (x - x_0)/h$ と変換したときは, u に関する平方和を h^2 倍すれば x に関する平方和になる。

(c) 分散分析表の作成

上に求めた各要因の平方和を, 表8.1.6のような分散分析表の形にまとめる。

表 8.1.6 分散分析表

要因	平方和	自由度	不偏分散	分散比	不偏分散の期待値
配合間 A	3.10	3	1.03	7.57	$\sigma_e^2 + 5\sigma_A^2$
繰返し間 e	2.18	16	0.136	—	σ_e^2
計 (T)	5.28	19	—	—	—

一元配置の場合の分散分析表の一般形は次のように表される。

要因	平方和 (S)	自由度 (ϕ)	不偏分散 (V)	分散比 (F_0)	不偏分散の期待値 $E(V)$
水準間 A	S_A	ϕ_A	V_A	V_A/V_e	$\sigma_e^2 + n\sigma_A^2$
水準内 e	S_e	ϕ_e	V_e	—	σ_e^2
計 T	S_T	ϕ_T	—	—	—

自由度はそれぞれ

$$\phi_A = a - 1, \phi_e = a(n - 1), \phi_T = an - 1 \quad (8.1.14)$$

不偏分散はそれぞれ

$$V_A = S_A/\phi_A, V_e = S_e/\phi_e \quad (8.1.15)$$

で求められる。 V_e は繰返しの誤差分散 σ_e^2 の不偏推定値であり, V_A の期待値は繰返しの誤差分散 σ_e^2 と配合間の差の成分 σ_A^2 の n 倍が加わったものである。

ここに n は繰返し数で, σ_A^2 は次の式で与えられるものである。

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{a-1} \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 \quad (8.1.16)$$

検定

配合間に差がないという仮説, すなわち

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \quad (\text{または } \sigma_A^2 = 0)$$

という仮説の検定を考えてみよう。

もし仮説 H_0 が正しければ, V_e と V_A は同じ期待値を持つ不偏分散であるから, V_A と V_e の比 V_A/V_e は自由度が ϕ_A, ϕ_e の F 分布となるはずである。これは分散の違いの片側検定 (5.4節) にあたる。このことを用いて, 次の検定規則が導かれる。

検定規則: 分散比 V_A/V_e が $F_{\alpha}^{\phi_A, \phi_e}$ (0.05) より大きいとき, ゼロ仮説 H_0 を棄却し, $\sigma_A^2 \neq 0$ と結論する (危険率 5%)

危険率 5% で有意となった場合には分散分析表の V_A/V_e の値に * をつけ, 1% で有意となった場合には ** をつけることが一般に行なわれている。

例題 8.1.2 表8.1.6の分散分析表について分散比の検定を行え。

(解) 表8.1.5 で求めた分散比 $V_A/V_e = 7.57$ は $F_{16}^3(0.05) = 3.24$ より大きい。したがって配合間には差があると認められる。

注 $V_A/V_e = 7.57$ は $F_{16}^3(0.01) = 5.29$ よりも大きいので, 危険率 1% でも有意となるから, 分散分析表の 7.57 の数値に ** をつけて 7.57** としておくとよい。

平均値の差の区間推定

検定では配合間に差があると認められた。どの配合間に差があるのかを調べるために, 平均値の差の区間推定を行なう。

母平均の差の区間推定の公式(6.4.5)から推定することができるが, V およ

但し ϕ は、繰返し間の不偏分散 V_e とその自由度 ϕ_e を用いる。

$\mu_i - \mu_{i'}$ に対する 95% 信頼限界:

$$\bar{x}_i - \bar{x}_{i'} \pm t(\phi_e, 0.05) \sqrt{\frac{2V_e}{n}} \quad (8.1.17)$$

例題 8.1.3 表 8.1.1 のデータについて平均値の差の区間推定を行え。

(解) $\phi_e = 16, V_e = 0.136, n = 5$ であるから

$$\bar{x}_i - \bar{x}_{i'} \pm t(16, 0.05) \sqrt{\frac{2 \times 0.136}{5}}$$

$$= \bar{x}_i - \bar{x}_{i'} \pm 2.12 \sqrt{0.054}$$

$$= \bar{x}_i - \bar{x}_{i'} \pm 0.49(\mu)$$

$\bar{x}_1 = 10.3, \bar{x}_2 = 10.8, \bar{x}_3 = 11.3, \bar{x}_4 = 11.2$ であったからこれをグラフに示す。

図中の矢印で示した幅は $\pm t(16, 0.05) \times \sqrt{\frac{2 \times 0.136}{5}}$ の長さである。したがって、平均値の差がこの長さより大きい A_1 と A_2, A_3, A_4 および A_2 と A_3 の間に有意差があることがわかる。

注 1. 母平均の推定

(8.1.17) 式では母平均の差の信頼限界を求めたが、各水準ごとの母平均に対する信頼限界を用いることもある。すなわち 6.2 節の方法から

$$\bar{x}_i \pm t(\phi_e, 0.05) \sqrt{\frac{V_e}{n}}$$

$$= \bar{x}_i \pm 2.12 \sqrt{\frac{0.136}{5}}$$

$$= \bar{x}_i \pm 0.35$$

となり、グラフに表わすと図 8.1.3 のようになる。線で示した幅は $t(\phi_e, 0.05) \sqrt{\frac{V_e}{n}}$ の 2 倍である。

2. 実験順序のランダム化

合計 20 回の焼成をするとき、1 日目に A_1 の配合について 5 回測定し、2 日目に A_2 、3 日目に A_3 、... という方法をとったらどうなるであろうか？

もし測定値が気温の変化、湿度の変化などの原因

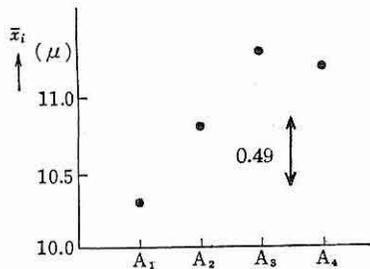


図 8.1.2 平均値の差

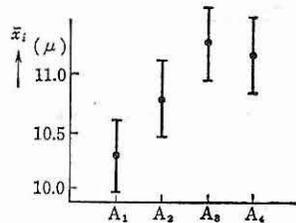


図 8.1.3 平均値の信頼区間

で日によって変動するとしたら、得られた平均値 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_4$ の差は果して配合の差によるものか、または日間誤差によるものか区別がつかない。これを“二つの要因が交絡している”という。これでは実験の目的が達せられない。同じ日に続けてやったとしても、測定の慣れや、原因のつかめない傾向を持った誤差がはいて来る危険がある。このような影響にジャマされないで結論を得るために、“実験順序のランダム化”という方法を採用する。

前例の場合には次のようにして行なえばよいであろう。

(1) 乱数表の任意のページの上に目をつぶって鉛筆の先を落し、あたったところを出発点とする。

(2) 出発点から右へ数字を読みとる。たとえば、

乱数表から次の数値が得られたとする。

03 47 43 73 86 36 96 47 36 61 46

(3) 5 と 0 を読みとばし 1 と 6, 2 と 7, 3 と 8, 4 と 9 に対してそれぞれ A_1, A_2, A_3, A_4 の水準を割り当てる。

*3 42 43 23 31 31 41 42 -1 1- 4-

(*は 5 または 0 で読みとばしたもの。- はすでに 5 回現れたので読みとばしたもの)

(4) こうして得られた順序によって実験を行なう。(表 8.1.7 参照)

ここに述べたランダム化の原則は統計的な取扱いをする場合の根本であって、常に心

掛けていなければならない。次節以降に“実験の順序はランダムに行なった”と記してあるときは、この項を思い起していただきたい。また

データを書き並べたとき、見掛けは同じでも実験の順序の決め方が違うとデータの構造が変わりしたがって解析方法を変えなければならないから注意しなければならない(8.5 節分割実験を参照)。

	A_1	A_2	A_3	A_4
9	3	1	2	
11	6	5	4	
13	15	7	12	
16	19	8	14	
17	20	10	18	

3. A の水準ごとの繰返し数が違う場合には、(8.1.9) 式の代わりに次の式を用いる。

$$S_A = \frac{(\sum_j x_{ij})^2}{\sum_i n_i} - \frac{(\sum_i \sum_j x_{ij})^2}{\sum_i n_i}$$

8.2 一元配置(変量模型)

前節では、それぞれの水準(配合)について、その母平均を推定することを目的とする一元配置を説明した。この節では母集団からいくつかのサンプル

を抜き取って、それぞれ反復測定し、そのデータからもとの母集団の性質(平均やバラツキの大きさ)を推定するための一元配置を説明する。

例 硫化鉱がたくさんの貨車に積まれて入荷した。全体が一つのロットと考えられるとき、全体についての平均硫黄含有率を推定したい。また貨車間で硫黄含有率にバラツキがあるかどうかを調べたい。どのようなサンプリングをしたらよいであろうか？

(説明) 平均含有率は次のようにして求められる。いくつかの(a 台の)貨車から、1インクリメントずつの鉱石を抜き取って分析し、得られた a 個のデータ x_1, x_2, \dots, x_a の平均値 \bar{x} を計算すると、これは平均含有率の不偏推定値となっている。

ここに得られた測定値 x_1, x_2, \dots, x_a のバラツキを分解してみると、その中には貨車間のバラツキと貨車内のバラツキ、縮分・分析の誤差が含まれる。それゆえ、これだけのデータのみでは貨車間のバラツキを抽出して推定することができない。この目的のためには、分散を各成分に分けて推定することができるようにデータをとらねばならない。

注 縮分 (reduction): 集めた試料からしだいに量を減らして測定用試料を作ること。たとえば、次のような手順に従ってデータをとる。

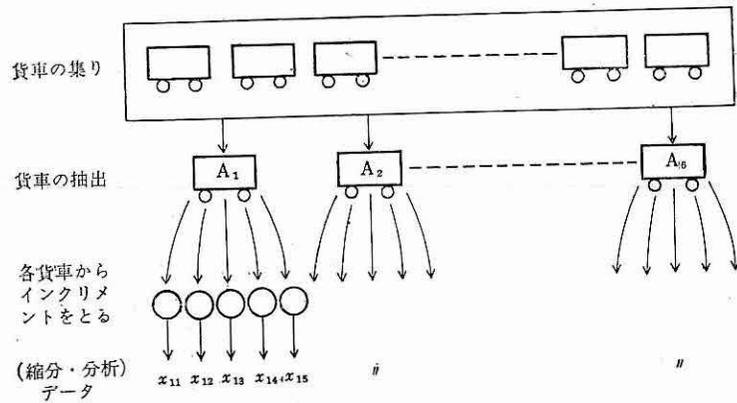


図 8.2.1 データのとり方

a 台の貨車をランダムに選び出し、各貨車から n 個ずつのインクリメントを抜き取る。各インクリメントごとに縮分して分析する。 $a=6, n=5$ として実験し、表8.2.1のデータが得られた。

このようにして得られたデータ x_{ij} は次の構造を持っている:

$$(\text{データ}) = (\text{総平均}) + (\text{貨車間のバラツキ}) + (\text{誤差})$$

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij} \quad (8.2.1)$$

この形だけで見ると前節の母数模型の場合と同じであるが、 α_i の意味が異なる。すなわち母数模型では α_i は個々の配合の効果を表しており、われわれはそれらの個々の値を知ろうとしたのであるが、変量模型では

表 8.2.1 分析データ x_{ij}

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆
	42.0	41.4	41.1	40.5	41.2	40.5
	41.8	41.5	40.8	40.4	40.9	40.3
	40.8	41.1	40.2	39.9	40.7	41.0
	41.4	41.6	41.5	39.7	41.3	39.9
	41.0	41.9	41.4	41.0	41.0	40.4

α_i は母平均 μ , 分散 σ_A^2 の母集団(ここでは貨車の集り)の中からランダムに抜き取られた貨車の偏差であって、 α_i の値そのものを推定するのが目的ではなく、 α_i のバラツキを通して母集団の分散 σ_A^2 を推定または検定するのが目的である。母数模型では各水準そのものに意味があったのであるが、変量模型では各水準は貨車間のバラツキを推定するために選ばれた貨車の代表であるにすぎない。

α_i には次の性質がある。

$$E(\alpha_i) = 0 \quad (8.2.2)$$

$$V(\alpha_i) = \sigma_A^2 \quad (8.2.3)$$

ϵ_{ij} は母数模型の場合と同様、互に独立で、平均 0 , 分散 σ_e^2 の正規分布に従う変量である。これは貨車内のバラツキ、および縮分・分析の誤差が含まれていると考えられる。

データの構造は異なるが、分散分析の計算は母数模型の場合と全く同じ手順で行うことができる。

例題 8.2.1 表8.2.1のデータについて分散分析を行え。

(解) 分散分析:

(a) 変換・和の表・平方表

$$u_{ij} = x_{ij} - 40.0 \quad (8.2.4)$$

と変換し, 表8.2.2のように計算する.

表 8.2.2 平方和の計算 (表中の ()内はその前の数の平方を示す)

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆
u_{ij}	2.0 (4.00)	1.4 (1.96)	1.1 (1.21)	0.5(0.25)	1.2 (1.44)	0.5(0.25)
	1.8 (3.24)	1.5 (2.25)	0.8 (0.64)	0.4(0.16)	0.9 (0.81)	0.3(0.09)
	0.8 (0.64)	1.1 (1.21)	0.2 (0.04)	-0.1(0.01)	0.7 (0.49)	1.0(1.00)
	1.4 (1.96)	1.6 (2.56)	1.5 (2.25)	-0.3(0.09)	1.3 (1.69)	-0.1(0.01)
	1.0 (1.00)	1.9 (3.61)	1.4 (1.96)	1.0(1.00)	1.0 (1.00)	0.4(0.16)
$\sum_j u_{ij}$	7.0(49.00)	7.5(56.25)	5.0(25.00)	1.5(2.25)	5.1(26.01)	2.1(4.41)
$\sum_i \sum_j u_{ij}$	28.2 (795.24)					

表8.2.2のカッコの中の数値から

$$\sum_i \sum_j u_{ij}^2 = 4.00 + 3.24 + \dots + 0.01 + 0.16 = 36.98$$

$$\frac{\sum_i (\sum_j u_{ij})^2}{n} = \frac{49.00 + 56.25 + \dots + 4.41}{5} = \frac{162.92}{5} = 32.584$$

$$CT = \frac{(\sum_i \sum_j u_{ij})^2}{an} = \frac{795.24}{6 \times 5} = 26.508$$

となる.

(b) 各平方和の計算

$$S_T = \sum_i \sum_j u_{ij}^2 - CT = 36.980 - 26.508 = 10.472$$

$$S_A = \frac{\sum_i (\sum_j u_{ij})^2}{n} - CT = 32.584 - 26.508 = 6.076$$

$$S_e = S_T - S_A = 10.472 - 6.076 = 4.396$$

(c) 分散分析表の作成

表 8.2.3 分散分析表

要因	平方和	自由度	不偏分散	分散比	不偏分散の期待値
貨車間 A	6.076	5	1.215	6.64**	$\sigma_e^2 + 5\sigma_A^2$
貨車内 e	4.396	24	0.183	—	σ_e^2
計 T	10.472	29	—	—	

**有意(1%)

分散比 V_A/V_e について F 検定を行なうと, 上の表から $V_A/V_e = 6.64$ となり $F_{24}^5(0.01) = 3.90$ であるから, $V_A/V_e > F_{24}^5(0.01)$ で, 貨車間のバラツキは高度に有意であると判断される.

分散成分の推定:

貨車間のバラツキ σ_A^2 および誤差分散 σ_e^2 の推定値は次のようにして求められる.

$$E(V_A) = \sigma_e^2 + n\sigma_A^2 \quad (8.2.5)$$

$$E(V_e) = \sigma_e^2 \quad (8.2.6)$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = V_e \quad (8.2.7)$$

$$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{V_A - V_e}{n} \quad (8.2.8)$$

例題 8.2.2 表8.2.3の分散分析表から σ_A^2 と σ_e^2 を推定せよ.

(解) 分散分析表から次の推定値を得る.

$$\hat{\sigma}_e^2 = V_e = 0.183$$

$$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{V_A - V_e}{5} = \frac{1.215 - 0.183}{5} = 0.206$$

総平均 μ の推定:

ロット全体についての平均含有率 μ は $\bar{x}_{..}$ によって推定されるが, その推定値の分散 $V(\bar{x}_{..})$ は次式で与えられる.

$$V(\bar{x}_{..}) = \frac{\sigma_A^2}{a} + \frac{\sigma_e^2}{an} \quad (8.2.9)$$

$$\sim \frac{V_A}{an}$$

よって, μ の信頼限界は次の式によって得られる.

$$\bar{x}_{..} \pm t(\phi_A, 0.05) \sqrt{\frac{V_A}{an}} \quad (8.2.10)$$

上の数値に対しては, これは

$$40.94 \pm t(5, 0.05) \sqrt{\frac{1.215}{30}}$$

$$= 40.94 \pm 2.57 \times 0.201$$

$$=40.94 \pm 0.52$$

となる。

応用例:

変量模型の一元配置実験は次のような場合に適用できる。

(1) たくさんの機械の中からいくつかの機械を抜き取って試験し、機械間のバラツキを推定したい。

(2) 1回分の溶湯から作られたインゴット間のバラツキとインゴット内のバラツキを知りたい。

(3) 化学分析の誤差を、個人誤差と同一人の繰返し誤差に分けて推定したい。

(4) 二段サンプリング法を採用するに当たって、1次サンプル間のバラツキと2次サンプル間のバラツキを推定して、最も有効なサンプリング法を決めたい。

注 \bar{x} -R管理図で、 \bar{R} から推定されるロット内変動 σ は $\hat{\sigma}_e$ に、 \bar{x} のバラツキから推定されるロット間変動は $\hat{\sigma}_A$ に対応している。

8.3 二元配置(繰返しなし)

前の二つの節では特性値に影響を与えると思われる因子を一つだけ取り上げて、その効果があるといえるかどうかを調べる方法を述べた。しかし、工場で実際に起る問題では、二つまたはそれ以上の因子が考えられる場合が多い。そのとき、因子を一つずつ取り上げて実験する代りに、全部の因子の水準を適当に組み合わせて実験を行い、全因子の効果を同時に推定・検定することができる。この節では因子が二つの場合(二元配置)を説明し、8.6節ではたくさんの因子の水準を巧妙に組み合わせて少ない実験回数で目的を達する方法(直交配列)を説明する。

この節で述べる繰返しのない二元配置(two-way layout)というのは、二つの因子A, Bの水準の数をそれぞれ a および b とした場合、全部で $a \times b$ 個のあらゆる組合せについておのおの1回ずつ実験する方法である。

例題8.1.1では、20回の焼成処理の順序をランダムに決めた。その順序は表8.1.7のようであった。もし焼成処理が一日に4回しかできないとすると、5日間にわたって実験が行われることになる。8.1節の注2で説明した“日間誤差”が存在した場合どんなことが起るであろうか?

表8.1.5を実験日が明らかになるように書き直すと表8.3.1のようになる。もし第2日の焼結炉の調子が悪いと、配合 A_3 の成績が悪いという結果が得られる。また A_1 の実験値が良かったとしても、配合 A_1 が特に勝れているわけではなく、実験になれたためであるかも知れない。このような疑いを排除して統計的に正しい結論を出すためには、Aの水準平均の間に日間の変動とは考えられない差があったと

表 8.3.1 実験日と実験順序

実験日	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
1		3	1	2 4
2		6	5 7 8	
3	9 11		10	12
4	13 16	15		14
5	17	19 20		18

きにはじめて有意差ありと判定することになる。8.1.1で説明した一元配置の解析でも、実験順序をランダム化してあったのならば、統計的に正しい推論をしていることにはなる。しかしこれでは、水準間に余程大きな差がないと発見できず、わずかの差は見逃されてしまう。

この欠点を取り除くためには、日間変動が配合間の比較に影響しないような実験をくふうすればよい。すなわち、毎日各配合について1回ずつ焼

表 8.3.2 乱数(実験順序)

配合 \ 日	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅
A ₁	03(1)	97(4)	16(1)	12(1)	55(2)
A ₂	47(3)	74(3)	76(4)	56(2)	59(4)
A ₃	43(2)	24(1)	62(3)	85(3)	56(3)
A ₄	73(4)	67(2)	27(2)	99(4)	35(1)

成処理を行なう。そして、実験順序を全体としてランダム化するのではなく、毎日の4回の実験の順序だけをランダムに決める。具体的にはたとえば次のようにする。

○乱数表を用いて各実験に2桁の乱数をわりあてる。(表8.3.2)

○乱数の小さい方から順序を 1, 2, ... と決める。

(同じ値のときは、もう 1 けた追加して比較する)

注 これは、6.3 節で対応があるようにデータを取ることで、測定者間のカタヨリを除去しているのと同じ考え方である。

例 フェライトコアの配合を A 因子(4 水準), 焼成日を B 因子(5 水準)として焼成実験を行い、表 8.3.3 のデータを得た。

これから、各因子の影響を調べよう。

まず、因子 A と B につ

いて各水準ごとの平均、

および全体の平均を計算

し、ついで各水準の平均

の総平均からのずれを求

める(表 8.3.4)。

データ x_{ij} は次の構造を持っていると考えられる。

データ = (総平均) + (A_i の効果) + (B_j の効果) + (誤差)

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad (8.3.1)$$

ここで α_i, β_j , および ε_{ij} は、一元配置(母数模型)で説明した α_i および ε_{ij} と同様の性質を持っている。これを表 8.3.5(a) のように図示することができる。

表 8.3.4 平均の計算

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	和	平均
和 $X_{i.}$	51.5	54.0	56.5	56.0	218.0	
$\bar{x}_{i.}$	10.3	10.8	11.3	11.2		10.9
$\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..}$	-0.6	-0.1	0.4	0.3	0.0	

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	和	平均
和 $X_{.j}$	42.0	41.6	44.4	44.8	45.2	218.0	
$\bar{x}_{.j}$	10.5	10.4	11.1	11.2	11.3		10.9
$\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..}$	-0.4	-0.5	0.2	0.3	0.4	0.0	

表 8.3.5(a) データの構造

x_{ij}

デ	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
1	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}
タ	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}
	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{45}

表 8.3.5(b) データの分解

	x_{ij}					x_{ij}				
	10.1	9.7	10.9	10.7	10.1	10.1	9.7	10.9	10.7	10.1
	10.0	10.4	11.2	11.1	11.3	10.0	10.4	11.2	11.1	11.3
	11.2	11.0	11.2	11.4	11.7	11.2	11.0	11.2	11.4	11.7
	10.7	10.5	11.1	11.6	12.1	10.7	10.5	11.1	11.6	12.1
	μ					$m = \bar{x}_{..}$				
総平均	μ	μ	μ	μ	μ	10.9	10.9	10.9	10.9	10.9
	μ	μ	μ	μ	μ	10.9	10.9	10.9	10.9	10.9
	μ	μ	μ	μ	μ	10.9	10.9	10.9	10.9	10.9
	μ	μ	μ	μ	μ	10.9	10.9	10.9	10.9	10.9
	α_i					$\alpha_i = \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..}$				
A の効果	α_1	α_1	α_1	α_1	α_1	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6
	α_2	α_2	α_2	α_2	α_2	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1
	α_3	α_3	α_3	α_3	α_3	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
	α_4	α_4	α_4	α_4	α_4	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
	β_j					$b_j = \bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..}$				
B の効果	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	-0.4	-0.5	0.2	0.3	0.4
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	-0.4	-0.5	0.2	0.3	0.4
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	-0.4	-0.5	0.2	0.3	0.4
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	-0.4	-0.5	0.2	0.3	0.4
	ε_{ij}					$\varepsilon_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{..}$				
誤差(残差)	ε_{11}	ε_{12}	ε_{13}	ε_{14}	ε_{15}	0.2	-0.1	0.4	0.1	-0.6
	ε_{21}	ε_{22}	ε_{23}	ε_{24}	ε_{25}	-0.4	0.1	0.2	0.0	0.1
	ε_{31}	ε_{32}	ε_{33}	ε_{34}	ε_{35}	0.3	0.2	-0.3	-0.2	0.0
	ε_{41}	ε_{42}	ε_{43}	ε_{44}	ε_{45}	-0.1	-0.2	-0.3	0.1	0.5

この構造になぞらえて、実際の数値を分解してみると表8.3.5(b)が得られる。
データの分解で、AおよびBの効果の和は0、また残差の行和、列和はいずれも0となる。これに対応して構造模型のほうでも、

$$\sum_i \alpha_i = 0$$

$$\sum_j \beta_j = 0$$

と考えるのが普通である。

分散分析の主旨：

データの x_{ij} 全体としてのバラツキは、総平方和

$$S_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{x}..)^2 \tag{8.3.2}$$

で表されるが、これはAの効果、Bの効果、残差の3成分に分けることができる。すなわち、

$$S_T = S_A + S_B + S_e \tag{8.3.3}$$

となる。この各成分は表8.3.5(b)の各箱の中の数の平方の和に等しい。すなわち、

$$S_A = 5\{(-0.6)^2 + (-0.1)^2 + 0.4^2 + 0.3^2\} = 3.10$$

$$S_B = 4\{(-0.4)^2 + (-0.5)^2 + 0.2^2 + 0.3^2 + 0.4^2\} = 2.80$$

$$S_e = 0.2^2 + (-0.1)^2 + \dots + 0.1^2 + 0.5^2 = 1.46$$

である。これを式で表わすと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} S_A &= \sum_{i=1}^a b(\bar{x}_{i.} - \bar{x}..)^2 \\ S_B &= \sum_{j=1}^b a(\bar{x}_{.j} - \bar{x}..)^2 \\ S_e &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}..)^2 \end{aligned} \right\} \tag{8.3.4}$$

実際の計算には、(8.3.2)、(8.3.4)式を変形した(8.3.5)式が用いられる。

ここに得られた S_A を求める式を一元配置の場合の(8.1.9)式と比較してみると、 n が b に変わっただけである。また因子Bだけの一元配置と考えて、水準間平方和を求める式を作れば、それが S_B を求める式になっている。

$$\left. \begin{aligned} CT &= \frac{(\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b x_{ij})^2}{ab} \\ S_T &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b x_{ij}^2 - CT \\ S_A &= \frac{\sum_{i=1}^a (\sum_{j=1}^b x_{ij})^2}{b} - CT \\ S_B &= \frac{\sum_{j=1}^b (\sum_{i=1}^a x_{ij})^2}{a} - CT \\ S_e &= S_T - S_A - S_B \end{aligned} \right\} \tag{8.3.5}$$

こうして求めた平方和を分散分析表にまとめると表8.3.6のようになる。

表 8.3.6 分散分析表

要因	平方和	自由度	不偏分散	分散比	不偏分散の期待値
要因 A	S_A	$\phi_A = a - 1$	$V_A = S_A / \phi_A$	V_A / V_e	$\sigma_e^2 + b\sigma_A^2$
要因 B	S_B	$\phi_B = b - 1$	$V_B = S_B / \phi_B$	V_B / V_e	$\sigma_e^2 + a\sigma_B^2$
残差 e	S_e	$\phi_e = (a-1)(b-1)$	$V_e = S_e / \phi_e$		σ_e^2
計 T	S_T	$\phi_T = ab - 1$			

例題 8.3.1 表8.3.3のデータについて分散分析を行え。

(解) (a) 変換・和の表・平方表

まず、

$$u_{ij} = (x_{ij} - 10.0) \times 10$$

という変換を行なう。これからまず、和 $\sum_j u_{ij}$, $\sum_i u_{ij}$, $\sum_i \sum_j u_{ij}$, および平方和の計算に必要な $\sum_i u_{ij}^2$, $\sum_j (\sum_i u_{ij})^2$, $\sum_i (\sum_j u_{ij})^2$, $(\sum_i \sum_j u_{ij})^2$ を表 8.3.7 の形式で計算する。その結果を利用して

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b u_{ij}^2 = 1 + 9 + \dots + 256 + 441 = 2356$$

$$\frac{\sum_{i=1}^a (\sum_{j=1}^b u_{ij})^2}{b} = \frac{225 + 1600 + 4225 + 3600}{5} = 1930$$

表 8.3.7 平方和の計算(表中の()内はその前の数の平方を示す)

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	$\sum_j u_{ij}$
A ₁	1(1)	-3(9)	9(81)	7(49)	1(1)	15(225)
A ₂	0(0)	4(16)	12(144)	11(121)	13(169)	40(1600)
A ₃	12(144)	10(100)	12(144)	14(196)	17(289)	65(4225)
A ₄	7(49)	5(25)	11(121)	16(256)	21(441)	60(3600)
$\sum_i u_{ij}$	20(400)	16(256)	44(1936)	48(2304)	52(2704)	180(32400)

$$\frac{\sum_{j=1}^b (\sum_{i=1}^a u_{ij})^2}{a} = \frac{400 + 256 + 1936 + 2304 + 2704}{4} = 1900$$

$$CT = \frac{32400}{4 \times 5} = 1620$$

が得られる。

(b) 各平方和の計算

各平方和は(a)の結果を(8.3.5)式に代入し、10²で除して求められる。すなわち、

$$S_T = (2356 - 1620) / 10^2 = 7.36$$

$$S_A = (1930 - 1620) / 10^2 = 3.10$$

$$S_B = (1900 - 1620) / 10^2 = 2.80$$

$$S_e = 7.36 - 3.10 - 2.80 = 1.46$$

(c) 分散分析表

上に求めた各要因の平方和を分散分析表の形にまとめる。

表 8.3.8 分散分析表

要因	平方和	自由度	不偏分散	分散比	不偏分散の期待値
配合間 A	3.10	3	1.03	8.5**	$\sigma_e^2 + 5\sigma_A^2$
実験日間 B	2.80	4	0.70	5.8**	$\sigma_e^2 + 4\sigma_B^2$
残差 e	1.46	12	0.12	—	σ_e^2
計 T	7.36	19	—	—	

分散比 $V_A/V_e = 8.5$ および $V_B/V_e = 5.8$ を付表4のF表の値 $F_{12}^4(0.01) = 5.95$,

$F_{12}^4(0.01) = 5.41$ とそれぞれ比較すると、どちらも大きいから有意である。

すなわち、原料配合によって製品の磁化率が変化することが確認された。また焼成処理に日間変動のあることも確かめられた。

例題 8.3.2 前の分散分析に引き続き、Aの水準間の平均値の差の区間推定および日間の分散 σ_B^2 の推定を行え。

(解)

因子Aの各水準の平均値間の差の95%信頼区間を次式によって求める。

$$\begin{aligned} & \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{j.} \pm t(12, 0.05) \sqrt{2V_e/5} \\ & = \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{j.} \pm 2.179 \times \sqrt{2 \times 0.12/5} \\ & = \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{j.} \pm 0.48 \end{aligned}$$

したがって、平均値に 0.48 以上の差のある水準間には有意差のあるということが出来る。

因子Bは変量因子であるから、 σ_B^2 を次式によって推定する

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_B^2 &= \frac{V_B - V_e}{4} \\ &= \frac{0.70 - 0.12}{4} = 0.15 \end{aligned}$$

注 表8.3.3の数値は、例題8.1.1の数値に次のような日間変動を加えて作ったものである。 $\sigma_B^2 = 0.16$, $\sigma_B = 0.4$

$$\beta_1 = -0.7, \beta_2 = -0.2, \beta_3 = 0.2, \beta_4 = 0.3, \beta_5 = 0.4$$

例題8.3.1と例題8.1.1の解析結果を比較してみると、A_iの効果、S_A、V_Aの値は、日間変動が加わっても変化を受けないことがわかる。またS_e、 ϕ_e は変るが、V_eは余り影響を受けないこともわかる。

表 8.3.9 データ

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
第1日		10.0	11.2	10.7 10.0
第2日		10.4	11.0	10.8 10.9
第3日	11.0 10.1		11.5	11.1
第4日	11.0 10.7	11.3		11.6
第5日	10.1	11.2 11.3		12.1
計	52.9	54.2	55.4	55.5
平均	10.6	10.8	11.1	11.1

ここで、もし、このような日間変動があるとき、8.1節のランダム化と解析を行なったらどうなるであろうか? そのとき得られると予想されるデータと分散分析の結果だけを表8.3.9と表8.3.10に示す。因子A間の差が日間変動の中に埋ぼつて、

表 8.3.10 分散分析表

要因	S	ϕ	V	F ₀
A	0.89	3	0.30	0.9
e	5.21	16	0.33	
T	6.10	19		

統計的にその存在を検出することが難しくなる。

8.4 二元配置(繰返しあり)

この節では、二つの因子の水準の各組合せ ($a \times b$ とおり) を r 回ずつ繰り返して実験する二元配置を説明する。この方法によると二つの因子の単独の効果(主効果とよばれる)だけでなく、二つの因子の水準の組合せによる効果(交互作用とよばれる)の有無やその大きさを推測することができる。

例 8.1 節のフェライトコア

の例では焼成処理の温度を一定にして実験を行った。製品の品質は焼成温度によっても変わる。最適な焼成温度を実験によって知りたい。また配合によって焼成温度の影響に差があり、最適焼成温度が異なるかも知れないので、配合と焼成温度の交互作用についても情報を得たい。

表 8.4.1 データ

温度 配合	1200°C	1250°C	1300°C	1350°C
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	11.0	11.4	10.9	10.5
	10.7	10.9	10.8	10.2
A ₂	9.8	10.6	11.5	10.8
	10.2	10.8	10.8	11.1
A ₃	9.5	10.6	10.9	10.1
	10.0	10.5	10.5	10.3

原料配合 A を 3 水準にとり、温度 B を 1200, 1250, 1300, 1350°C の 4 水準

とって、 $3 \times 4 = 12$ とおりの組合せを 2 回ずつ、計 24 回の焼成処理を行った。

なお 24 回の実験全体をランダムな順序にした。得られた製品の磁性の強さは表 8.4.1 のとおりであった。この場合の解析はどのように行なえばよいか。

(説明) 式を簡単にするために、次の記号を導入する。

$$\left. \begin{array}{l} \text{合計} \left\{ \begin{array}{l} X_{ij.} = \sum_k x_{ijk} \\ X_{i..} = \sum_j \sum_k x_{ijk}, \quad X_{.j.} = \sum_i \sum_k x_{ijk} \\ X_{...} = \sum_i \sum_j \sum_k x_{ijk} \end{array} \right. \\ \text{平均} \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_{ij.} = \frac{X_{ij.}}{r} \\ \bar{x}_{i..} = \frac{X_{i..}}{br}, \quad \bar{x}_{.j.} = \frac{X_{.j.}}{ar} \\ \bar{x}_{...} = \frac{X_{...}}{abr} \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (8.4.1)$$

ここに、添字の動く範囲は、それぞれ $i=1, 2, \dots, a; j=1, 2, \dots, b; k=1, 2, \dots, r$ である。

交互作用:

表 8.4.1 のデータについて平均 $\bar{x}_{ij.}, \bar{x}_{i..}, \bar{x}_{.j.}, \bar{x}_{...}$ および A_i, B_j の効果 $\hat{\alpha}_i = \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{...}, \hat{\beta}_j = \bar{x}_{.j.} - \bar{x}_{...}$ を計算した結果を表 8.4.2 に示す。

A の効果と B の効果が独立であると仮定して、 A_i, B_j の組合せで得られる値を推定してみよう。

表 8.4.2 平均と効果

$\bar{x}_{ij.}$	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	平均 $\bar{x}_{i..}$	効果 $\hat{\alpha}_i$
A ₁	10.85	11.15	10.85	10.35	10.80	0.20
A ₂	10.00	10.70	11.15	10.95	10.70	0.10
A ₃	9.75	10.55	10.70	10.20	10.30	-0.30
平均 $\bar{x}_{.j.}$	10.20	10.80	10.90	10.50	10.60 ($\bar{x}_{...}$)	
効果 $\hat{\beta}_j$	-0.40	0.20	0.30	-0.10		

$$\left. \begin{array}{l} A_i B_j \text{ の推定値} = \bar{x}_{...} + (\bar{x}_{i..} - \bar{x}_{...}) + (\bar{x}_{.j.} - \bar{x}_{...}) \\ = \bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.j.} - \bar{x}_{...} \end{array} \right\} \quad (8.4.2)$$

実測値 $\bar{x}_{ij.}$ と上に求めた推定値との差が誤差に比べて有意に大きければ、上の仮定 (A の効果と B の効果が独立である) が誤りであると結論される。 A_i と B_j の組合せによる効果を交互作用と呼び、その大きさは

$$\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{...} \quad (8.4.3)$$

と推定される。表 8.4.2 から計算した結果を表 8.4.3 に示す。

表 8.4.3 交互作用の推定値

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	0.45	0.15	-0.25	-0.35
A ₂	-0.30	-0.20	0.15	0.35
A ₃	-0.15	0.05	0.10	0.00

交互作用に対し、たとえば A_1 の平均的効果 α_1 のことを A の主効果と呼び $\hat{\alpha}_i = \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{...}$ と推定される。

繰返しのある二元配置の場合には、分散分析によって総平方和 S_T が次の 4 つの成分に分解され、交互作用の有意性を検定することができる。